

Mecánica Estadística

Evaluación continua. Segundo control

23/04/2026

Problemas

Nota: Debe elegirse uno de los dos ejercicios propuestos a continuación.

1. *Equilibrio mecánico de un gas de Bose ideal.* Un sistema cerrado en una caja de volumen V está dividido en dos compartimentos, 1 y 2, por un pistón móvil, adiabático e impermeable, de modo que $V = V_1 + V_2$. El compartimento 1 contiene un gas ideal clásico cuya ecuación de estado a la temperatura de trabajo es $P_1 V_1 = N_1 k_B T$, mientras el segundo contiene un gas ideal de N_2 bosones no relativistas de masa m y spin s . Todo el sistema se mantiene en equilibrio térmico entre dos focos a una temperatura T inferior a la temperatura de Bose del gas de bosones (Fig. 1).

Supóngase que no hay intercambio de partículas entre los compartimentos, de modo que N_1 y N_2 permanecen constantes.

- i) Demuéstrese que la presión del gas de bosones puede escribirse en términos del número de partículas en estados excitados como:

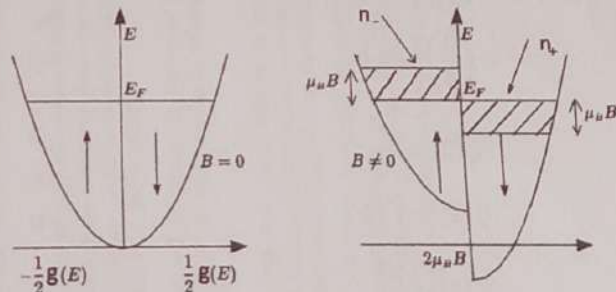
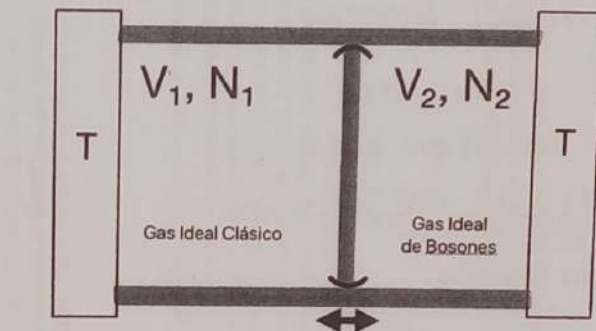
$$P_2 = \frac{\bar{N}_{\text{exc}}}{V_2} k_B T \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)}$$

- ii) Obténgase la fracción de partículas en el estado condensado del gas de bosones en el equilibrio mecánico entre los dos gases:

$$\frac{\bar{N}_0}{N_2} = 1 - \frac{\rho_1 \zeta(3/2)}{\rho_2 \zeta(5/2)}$$

2. *Gas de electrones en un campo magnético: paramagnetismo de Pauli.* Considérese un gas ideal de electrones (factor de Landé $g = 2$, $m_s = \pm 1/2$) con momentos magnéticos $-g\mu_B m_s \simeq \mp \mu_B$ en presencia de un campo magnético, de modo que los electrones con energía próxima a la energía de Fermi ($\mu_B B \ll \epsilon_F$) adquieren diferentes energías según tengan momentos magnéticos paralelos ($n_\uparrow$) o antiparalelos ($n_\downarrow$) al campo (Fig. 2). Debido a ello, las poblaciones de momentos magnéticos paralelos y antiparalelos al campo difieren de su valor de equilibrio en ausencia de este ($n_e/2$), aumentando la de momentos paralelos al campo y disminuyendo la de antiparalelos en la misma medida.

Estímese la magnetización $\langle M \rangle = (\bar{n}_\uparrow - \bar{n}_\downarrow)\mu_B$ en términos de la densidad de estados del sistema y demuéstrese la ecuación de Sommerfeld para la susceptibilidad paramagnética del gas de electrones, $\chi = g(\epsilon_F)\mu_B^2$.



Relaciones matemáticas de posible utilidad:

Aproximaciones

$$\ln N! \approx N \ln N - N; \text{ para } N \rightarrow \infty$$

$$\ln(1 + \alpha x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\alpha x)^n$$

$$\ln(1 - \alpha x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n}; \text{ para } 0 < x < 1$$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x; \text{ para } |x| \ll 1$$

Función Γ

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx;$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{4^n (n!)} \sqrt{\pi}; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Función ζ de Riemann

$$g_k(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n^k}$$

$$g_k(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \equiv \zeta(k)$$

$$\frac{dg_k(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} g_{k-1}(\lambda)$$

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \approx -1,46$$

$$\zeta(1) \rightarrow \infty$$

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2,61$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(3) \approx 1,20$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$f_k(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\lambda^n}{n^k}$$

Integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}+c}$$

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx; \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{2\alpha} I_n$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt = \operatorname{erf}(x)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx = \Gamma(n+1) \zeta(n+1)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x + 1} dx = (1 - 2^{-n}) \Gamma(n+1) \zeta(n+1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} dx = 1$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \frac{a^{-n/2-1/2}}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Varios

Volumen de una hipersfera de radio r en D dimensiones:

$$V_D = \frac{r^D \pi^{D/2}}{\Gamma(D/2 + 1)}$$

Función de Langevin

$$L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}$$

Constantes físicas de interés

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/mol K Cte. Boltzmann}$$

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ Cte. Planck}$$

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg masa del electrón}$$

$$m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg masa del neutrón}$$

$$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg masa del protón}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C carga del electrón}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \text{ velocidad de la luz}$$

$$\mu_N = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ J T}^{-1} \text{ magnetón nuclear}$$

$$\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1} \text{ magnetón de Bohr}$$